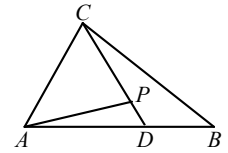


- 爱智康

7. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F 作直线交双曲线的两条渐近线于 A, B 两点, 若 B 为线段 FA 的中点, 且 $OB \perp FA$, 则双曲线的离心率为 ().

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, P 为 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 若 $AB = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 $|\overrightarrow{AP}|$ 为 ().



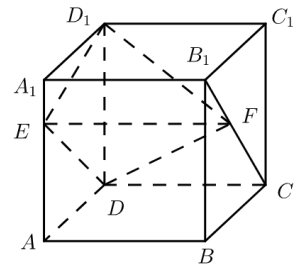
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $\frac{4}{3}$

二、填空题 (本大题共6题, 每小题5分, 共计30分)

9. 已知复数 $Z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i}$, 则 Z 的实部为 _____.

10. 二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中常数项为 _____ (用数字作答).

11. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, E, F 分别为线段 AA_1, B_1C 上的动点, 则三棱锥 $D_1 - EDF$ 体积为 _____.



12. 已知在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}t^2 \\ y = 4t \end{cases}$ (t 为参数), 点 $M(\sqrt{2}, 0)$, P 为 C 上一点, 若 $|PM| = 4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POM$ 的面积 _____.

13. 已知 x, y 均为正实数, 且 $\frac{2x+y}{xy} = \frac{7}{2} + \sqrt{6}$, 则 $x + 3y$ 的最小值为 _____.

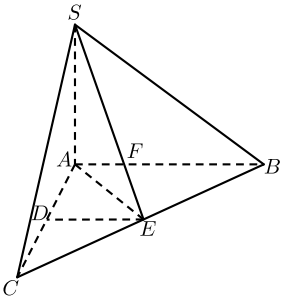
14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \geq 0 \\ 4x + 4, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = x + a - f(x)$ 有三个零点, 则这三个零点之和的取值范围是 _____.

三、解答题（本大题共6题，共计80分）

15. 已知 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C 的对边， $\angle B = 2\angle C$ ， $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
- (1) 求 $\cos B$ ， $\cos A$ 的值 .
- (2) 设 $bc = 24$ ，求边 a 的长 .

16. 现有长分别为1m、2m、3m的钢管各3根（每根钢管质地均匀、粗细相同且附有不同编号），从中随机抽取 n 根（假设各钢管被抽取的可能性是均等的， $1 \leq n \leq 9$ ），再将抽取的钢管相接焊成笔直的一根。
- （1）当 $n = 3$ 时，记事件 $A = \{\text{抽取的3根钢管中恰有2根长度相等}\}$ ，求 $P(A)$ 。
- （2）当 $n = 2$ 时，若用 ξ 表示新焊成的钢管的长度（焊接误差不计），求 ξ 的分布列及 $E(\xi)$ 。

17. 如图，在三棱锥 $S - ABC$ 中， $SA \perp$ 底面 ABC ， $AC = AB = SA = 2$ ， $AC \perp AB$ ， D ， E 分别是 AC ， BC 的中点， F 在 SE 上，且 $SF = 2FE$ 。



- (1) 求证： $AF \perp$ 平面 SBC 。
- (2) 求直线 SA 与平面 SBD 所成角的正弦值。
- (3) 在线段 DE 上是否存在点 G ，使二面角 $G - AF - E$ 的大小为 30° ？若存在，求出 DG 的长；若不存在，请说明理由。

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 为其前 n 项和, 且 $a_5 = 3a_2$, $S_7 = 14a_2 + 7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列, 求数列 $\{(-1)^n b_n (a_n + b_n)\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点), 求 $|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值.

20. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + a$, $g(x) = \frac{x-1}{e^x}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 证明: $0 < x_1 < x_2$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{1}{x_1} - 1$.

(3) 在 (2) 的条件下, 证明: $f(x)(g(x) - 1) > g(x) - \frac{1}{e^2}$.